8. *Меметов Н. Р., Ткачев А. Г., Зеленин А. Д.* Методика расчета реакторов для получения углеродных наноструктурных материалов в виброожиженном слое // Вопросы современной науки и практики. Университет им. В.И. Вернадского. 2006. № 3(5). С. 124–130.

9. *Zhou L., Wang H., Zhou T., Li K., Kage H., Mawatari Y.* Model of estimating nano-particle agglomerate sizes in a vibro-fluidized bed // Advanced Powder Technology. 2013. V. 24. P. 311–316.

УДК 519.6

О ПРИБЛИЖЕННОМ ВЫЧИСЛЕНИИ ГИПЕРСИНГУЛЯНЫХ ИНТЕГРАЛОВ НА ОТРЕЗКЕ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Мл. научн. сотр. ***Плиева Л. Ю***.
Южный математический институт
Владикавказского научного центра РАН и РСО-А,
Северо-Осетинский государственный университет
им. К. Л. Хетагурова,
г. Владикавказ, РСО-Алания, Россия

В работе строятся квадратурные формулы интерполяционного типа для приближенного вычисления гиперсингулярных интегралов на отрезке интегрирования с весовыми функциями. Дается оценка погрешности.

Ключевык слова: *гиперсингуляный интеграл, оценка погрешности, квадратурная формула, интерполяционный многочлен.*

Рассмотрим гиперсингулярные интегралы вида:

$$H^{(1/2;1/2)}(\varphi, x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\varphi(t)}{(t-x)^2}\,dt, \tag{1}$$

$$H^{(-1/2;1/2)}(\varphi, x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{\varphi(t)}{(t-x)^2}\,dt, \tag{2}$$

$$x \in (-1, 1)$$

где $\varphi(t)$ достаточно гладкая функция, принадлежащая классу $H_r(\alpha)$ $(r \ge 1,\, 0 < \alpha \le 1)$.

Интегралы (1) и (2) понимаются в смысле главного значения Адамара [1, 2].

Интегралы такого типа имеют широкое приложение в задачах теории упругости, аэродинамики, математической физики и т. д.

В данной работе строятся квадратурные формулы интерполяционного типа, путем замены плотности $\varphi(t)$ интерполяционными многочленами, построенными по узлам многочленов ортогональных по весу на отрезке $[-1,1]$.

Справедлива теорема.

Теорема 1. Если плотность $\varphi(t)$ в интеграле (1) равна многочлену Чебышева первого рода, то для интеграла

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{T_n(t)}{(t-x)^2}dt,\ x\in(t-x), \tag{3}$$

$$T_n(t)=\cos(n\arccos t)$$

справедлива формула

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{T_n(t)}{(t-x)^2}dt=\frac{xU_{n-1}(x)-nT_n(x)}{1-x^2}, \tag{4}$$

где $U_n(x)=\dfrac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$ – многочлен Чебышева 2 рода.

Доказательство. Над интегралом (3) произведем следующие преобразования:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{T_n(t)}{(t-x)^2}dt=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\frac{T_n(t)}{(1-t^2)(t-x)^2}dt=\frac{2x}{(1-x^2)^2}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\frac{T_n(t)}{t-x}dt+$$

$$+\frac{1}{1-x^2}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\frac{T_n(t)}{(t-x)^2}dt+\frac{1}{2(1-x)^2}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\frac{T_n(t)}{1-t}dt+\frac{1}{2(1+x)^2}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\frac{T_n(t)}{1+t}dt\,.$$

В интегралах

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\frac{T_n(t)}{t-x}dt,\quad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\frac{T_n(t)}{(t-x)^2}dt,$$

заменим многочлен $T_n(t)$ через многочлены Чебышева 2 рода по формуле [3]:

$$T_n(t)=\frac{1}{2}(U_n(t)-U_{n-2}(t)).$$

Далее, используя формулы обращения [2–3]

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\frac{U_n(t)}{t-x}dt=-T_{n+1}(x),$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\frac{U_n(t)}{(t-x)^2}dt=-(n+1)U_n(x),$$

для интеграла (3) после несложных преобразований получим:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{T_n(t)}{(t-x)^2}dt=\frac{2x}{1-x^2}U_{n-1}(x)+\frac{1}{2(1-x^2)}[-2nT_n(x)-2xU_{n-1}(x)]=$$

$$=\frac{xU_{n-1}(x)-nT_n(x)}{1-x^2}.$$

$$x\in(-1,1).$$

Что и требовалось доказать.

Аппроксимируем плотность $\varphi(t)$ в интеграле (1) интерполяционным многочленам по узлам Чебышева первого рода:

$$\varphi(t)\approx\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}\sqrt{1-x_k^2}\,T_n(t)}{(t-x_k)}\varphi(x_k), \tag{5}$$

$$x_k=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi,\ (k=1,2,...,n).$$

Подставим (5) в интеграл (1):

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{\varphi(t)}{(t-x)^2}dt\approx\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sqrt{1-x_k^2}\,\varphi(x_k)\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{T_n(t)}{(t-x_k)(t-x)^2}.$$

Преобразуя полученное выражение и используя формулу (4), получим следующую квадратурную формулу

$$H^{(1/2;1/2)}(\varphi,x)\approx\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{n-1}\sqrt{1-x_k^2}}{x-x_k}\left[\frac{U_{n-1}(x_k)-U_{n-1}(x)}{x-x_k}+\frac{xU_{n-1}(x)-nT_n(x)}{1-x^2}\right]\varphi(x_k). \tag{6}$$

Полученная квадратурная формула позволяет вычислить рассмотренный интеграл для любого значения параметра $x \in (-1, 1)$.

Теорема 2. Если плотность $\varphi(t)$ принадлежит классу $H_r(\alpha), (r \geq 1,\ 0 < \alpha \leq 1)$, то для погрешности квадратурной формулы (6) справедлива оценка:

$$\left|R_n(\varphi, x)\right| \leq \frac{1}{1-x^2} O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right), \tag{7}$$

где $1 \leq r < n$.

Доказательство. Плотность $\varphi(t)$ представим в виде:

$$\varphi(t) = \varphi(t_k) + \frac{\varphi'(t_k)}{1!}(t-t_k) + \frac{\varphi''(t_k)}{2!}(t-t_k)^2 + \ldots + \frac{\varphi^{(r)}(t_k)}{r!}(t-t_k)^r + $$
$$+ \frac{1}{(r-1)!}\int_{t_k}^{t}(t-u)^{r-1}(\varphi^{(r)}(u) - \varphi^{(r)}(t_k))du,$$

где $t_0 = -1,\ t_k = -1 + kh, h = \dfrac{2}{n+1}, k = \overline{1, n}$.

Для оценки погрешности имеем:

$$\left|R_n(\varphi, x)\right| \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\pi} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{1}{(t-x)^2} \frac{1}{(r-1)!} \int_{t_k}^{t} \left|(t-u)^{r-1}\right| \left|\varphi^{(r)}(u) - \varphi^{(r)}(t_k)\right| du dt$$

.

Учитывая

$$\left|(\varphi^{(r)}(u) - \varphi^{(r)}(t_k))\right| \leq A\left|u - t_k\right|^{\alpha} = O(h^{\alpha}) = O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right),$$

получим

$$\left|R_n(\varphi, x)\right| \leq \frac{1}{1-x^2} O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right).$$

Справедлива теорема.

Теорема 3. Если плотность $\varphi(t)$ в интеграле (2) имеет вид $\varphi(t) = C_n(t)$, где

$$C_n = \frac{\cos\frac{2n+1}{2}\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}, \ \theta = \arccos t,$$

многочлен степени n ортогональный по весу $p(t)=\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$ на отрезке $[-1,1]$, то справедлива формула

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\frac{C_n(t)}{(t-x)^2}dt = \frac{(1+n)U_{n-1}(x)-nU_n(x)}{1-x}. \quad (8)$$

Доказательство. Преобразуем интеграл

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\frac{C_n(t)}{(t-x)^2}dt, \quad (9)$$

используя представление многочлена $C_n(t)$ через многочлены Чебышева первого рода

$$C_n(t) = \frac{T_n(t)+T_{n+1}(t)}{1+t}. \quad (10)$$

Будем иметь:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\frac{C_n(t)}{(t-x)^2}dt = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{T_n(t)}{(t-x)^2}dt + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{T_{n+1}(t)}{(t-x)^2}dt. \quad (11)$$

Используя формулу (4), получим:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\frac{C_n(t)}{(t-x)^2}dt = \frac{(1+n)U_{n-1}(x)-nU_n(x)}{1-x}, \ x\in(-1,1).$$

Что и требовалось доказать.

Заменив в интеграле (2) плотность $\varphi(t)$ интерполяционным многочленам по узлам $C_n(t)$

$$\varphi(t) \approx \frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}\sqrt{1-x_k^2}\,C_n(t)}{(t-x_k)}\cos\frac{2k-1}{2(2n+1)}\pi\varphi(x_k),$$

и используя формулу (8), получим квадратурную формулу:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\frac{\varphi(t)}{(t-x)^2}dt \approx \frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{л-1}\sqrt{1-x_k^2}\cos\left(\frac{2k-1}{2(2n+1)}\pi\right)}{x-x_k}\times$$

$$\times\left[\frac{S_n(x_k)-S_n(x)}{x-x_k}+\frac{(1+n)U_{n-1}(x)-nU_n(x)}{1-x}\right]\varphi(x_k), \quad (12)$$

$$x_k = \cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi .$$

Теорема 4. Если плотность $\varphi(t)$ принадлежит классу $H_r(\alpha),(r \geq 1,\ 0<\alpha \leq 1)$, то для погрешности квадратурной формулы (12) справедлива оценка:

$$\left|R_n(\varphi, x)\right| \leq \frac{1}{1-x^2}O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right), \quad (13)$$

где $1 \leq r < n$.

Доказательства. Плотность $\varphi(t)$ представим в виде:

$$\varphi(t)=\varphi(t_k)+\frac{\varphi'(t_k)}{1!}(t-t_k)+\frac{\varphi''(t_k)}{2!}(t-t_k)^2+...+\frac{\varphi^{(r)}(t_k)}{r!}(t-t_k)^r+$$

$$+\frac{1}{(r-1)!}\int_{t_k}^{t}(t-u)^{r-1}(\varphi^{(r)}(u)-\varphi^{(r)}(t_k))du,$$

где $t_0=-1,\ t_k=-1+kh, h=\frac{2}{n+1}, k=\overline{1,n}$.

Для оценки погрешности имеем

$$\left|R_n(\varphi,x)\right| \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\frac{dt}{(t-x)^2}\frac{1}{(r-1)!}\int_{t_k}^{t}\left|(t-u)^{r-1}\right|\left|\varphi^{(r)}(u)-\varphi^{(r)}(t_k)\right|dudt \leq$$

$$\leq O(h^{r+\alpha})\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\frac{dt}{(t-x)^2}=\frac{1}{1-x^2}O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right).$$

Построенные квадратурные формулы удобны в использовании на практике. Многочисленные тестовые примеры показывают эффективность метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бойков И. В.* Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных. Часть 2. Гиперсингулярные интегралы. Пенза: Издательство Пензенского государственного университета, 2009. 252 с.

2. *Лифанов И. К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО «Янус», 1995. 520 с.

3. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М.: Наука, 1983. 384с.

4. *Крылов В. И.* Приближенное вычисление интегралов. М.: Наука, 1967. 500 с.