

УДК 519.688: 550.34

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА  
ПРИ ОБРАБОТКЕ СЕЙСМОЛОГИЧЕСКИХ ДАННЫХ\***

Д-р физ.-мат. наук, проф., *Заалишвили В. Б.*,  
канд. техн. наук, зав. сектором *Мельков Д. А.*,  
науч. сотруд. *Дзбоев Б. А.*

Центр геофизических исследований  
Владикавказского научного центра РАН и РСО-Алания,  
г. Владикавказ, РСО-Алания, Россия

*Разработаны алгоритмы дискретного вейвлет-преобразования (ДВП) на основе быстрого преобразования Фурье (БПФ). Показаны примеры спектрально-временного разложения сейсмических записей. Программное обеспечение реализовано в среде MATLAB и может найти применение при обработке данных различной природы.*

**Ключевые слова:** *вейвлет-анализ, дискретное вейвлет-преобразование (ДВП), быстрое преобразование Фурье (БПФ), сейсмограмма.*

Вейвлет-преобразование в настоящее время стало широко использоваться при сжатии данных, причем не только NASA для сжатия снимков, получаемых из космоса (формат ICER), но и, в частности, вейвлет-преобразование лежит в основе формата JPEG 2000 (jp2), который отличается лучшим качеством изображения при меньших размерах файлов. В настоящее время вейвлет-анализ стал мощным инструментом анализа данных. Спектрально-временное вейвлет-разложение временных рядов не обладает главным недостатком оконного преобразования Фурье – зависимостью минимальной частоты от ширины окна, которое не может быть адаптировано к локальным свойствам сигнала. Вейвлет-анализ использовался нами для анализа природы и дифференциации записей процесса схода ледника Колка 20 сентября 2002 года [1, 2], метеорологических данных [3]. На рис. 1. показано спект-

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ МК-454.2014.5 «Исследование записей сильных землетрясений методами поляризованного и вейвлет-анализа и разработка современной спектрально-временной модели сейсмического воздействия».

рально временное разложение записи сейсмического события, предшествующего сходу – хорошо видны две составляющие сигнала. Увеличение объемов данных и внедрение технологии вейвлет-анализа в обработку потребовало разработку более эффективного и быстрого алгоритма вейвлет-преобразования.

Непрерывное вейвлет-преобразование (CWT) есть скалярное произведение  $f(t)$  и базисных функций  $\psi_{a,b}(t) = a^{-\frac{1}{2}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ ,  $a \in R+, b \in R$ , так что [4,5]:

$$CWT_f(a,b) = a^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) f(t) dt . \quad (1)$$

Функции  $\psi_{a,b}$  называются вейвлетами (в переводе – короткие волны) и могут рассматриваться как масштабированные и сдвинутые версии функции прототипа  $\psi_{a,b}(t)$ . Параметр  $b$  показывает расположение во времени,  $a$  – параметр масштаба.

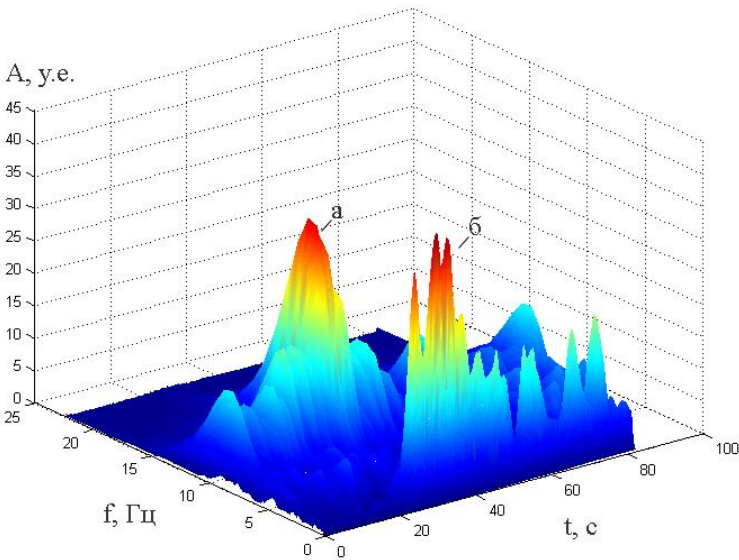


Рис. 1. Вейвлет-анализ Z-составляющей записи ст. Чиколо, 15:55:40 GMT, 3D-представление, составляющие сигнала на 6–12 Гц (а) и 0,7–1,4 Гц (б).

Часто в качестве вейвлетов рассматриваются только вещественные функции. Действительно, во многих задачах (сжатие изображений и т. п.) нет необходимости рассматривать комплексное пространство, однако, при обработке сигналов естественно будет по аналогии с Фурье-преобразованием использовать в качестве вейвлетов комплексные функции. Примером может быть вейвлет Морли (Morlet wavelet, рис. 2.), состоящий из плоской волны модулированной функцией Гаусса:

$$\psi_0(\eta) = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{i\omega_0\eta} e^{-\frac{\eta^2}{2}}, \quad (2)$$

где  $\omega_0$  – безразмерная частота, обычно принимаемая равной 6.

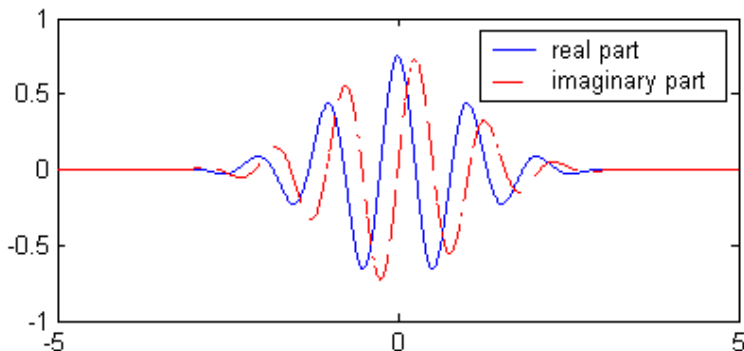


Рис. 2. Вейвлет Морли,  $\omega_0=6$ , сплошной линией показана действительная часть, пунктирной – мнимая.

Термин «вейвлет» используется в общем для обозначения ортогональных и неортогональных вейвлетов. Понятие «базис» относится только к ортогональному набору функций. Использование ортогонального базиса подразумевает использование дискретного вейвлет-преобразования (discrete wavelet transform), в то время как неортогональные вейвлет-функции могут быть использованы как в дискретном, так и в непрерывном вейвлет-преобразовании [6].

Непрерывное вейвлет-преобразование дискретной последовательности  $x_n$  определяется как свёртка  $x_n$  с масштабированной и смещённой функцией  $\psi_0(\eta)$ :

$$W_i(s) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \psi^* \left[ \frac{(n'-n)\Delta t}{s} \right], \quad (3)$$

$$\psi \left[ \frac{(n'-n)\Delta t}{s} \right] = \left( \frac{\Delta t}{s} \right)^{\frac{1}{2}} \psi_0 \left[ \frac{(n'-n)\Delta t}{s} \right],$$

где функция  $\psi_0(\eta)$  нормирована, чтобы иметь единичную энергию.

Путём изменения масштаба  $s$  и перемещения вдоль временного индекса  $n$ , можно построить зависимость амплитуды от масштаба и времени.

Для ортогональной системы вейвлетов выбор масштабов  $s$  ограничен дискретным набором [6]. Для неортогонального вейвлет-анализа можно использовать произвольный набор масштабов, чтобы построить более полную картину. Наиболее удобно записать масштабы как дробную степень двух:

$$s_j = s_0 2^{j \cdot \delta j}, \quad j = 0, 1, \dots, J, \quad (4)$$

$$J = \delta j^{-1} \log_2 \left( \frac{N \Delta t}{s_0} \right),$$

где  $s_0$  – наименьший масштаб,  $J$  определяет максимальный масштаб.

Масштаб  $s_0$  должен быть выбран таким образом, чтобы эквивалентный период Фурье был приблизительно равен  $\Delta t$ . Выбор малой величины  $\delta j$  зависит от ширины вейвлета в спектральном пространстве. Для вейвлета Морли  $\delta j=0,5$  есть наибольшее значение, которое даёт достаточную дискретизацию масштаба, в то время как для других вейвлет-функций может быть использовано большее значение. Меньшие значения  $\delta j$  дают лучшее разрешение.

Важным аспектом вейвлет-анализа является определение соотношения между масштабом  $s$  и частотой колебаний. Соотношение между эквивалентным периодом Фурье (equivalent Fourier period) и масштабом может быть получен аналитически и для вейвлета Морли [5]:

$$\lambda = \frac{4\pi s}{\omega_0 + \sqrt{2 + \omega_0^2}}, \quad (5)$$

где  $\lambda$  – период Фурье.

Если  $\omega_0=6$ , то  $\lambda=1,03s$ .

Поскольку функция  $\psi(\eta)$  в общем случае комплексная, вейвлет-преобразование  $Wn(s)$  также является комплексным. Преобразование может быть разделено на действительную часть  $\Re\{Wn(s)\}$  и мнимую  $\Im\{Wn(s)\}$ , или амплитуду  $|Wn(s)|$  и фазу  $\tan^{-1}[\Im\{Wn(s)\}/\Re\{Wn(s)\}]$ .

Пример амплитудного вейвлет-спектра записи землетрясения представлен на рис. 3. На графике видны вступления  $p$ - и  $s$ -волн, максимумы которых находятся в полосе 2–3 Гц. Изображение действительной (мнимой) части коэффициентов вейвлет преобразования (рис. 4) даёт картину, аналогичную той, которая может быть получена при использовании действительных вейвлетов (Mexican hat и др.), которые позволяют фиксировать положительные и отрицательные колебания в виде отдельных пиков. И, наконец, можно определить энергетический вейвлет-спектр (wavelet power spectrum) как  $|Wn(s)|^2$ .

Для выполнения непрерывного вейвлет-преобразования требуется выполнить свертку по формуле (3)  $N$  раз для каждого масштаба, где  $N$  – длина сигнала. С другой стороны, свертку можно выполнить одновременно для всех точек одновременно, используя преобразование Фурье:

$$\hat{x}_k = \frac{1}{N} \sum_{n'=0}^{N-1} x_{n'} e^{-2\pi i k n' / N}, \quad (6)$$

где  $k=0 \dots N-1$  соответствует различным частотам;

$i$  – мнимая единица.

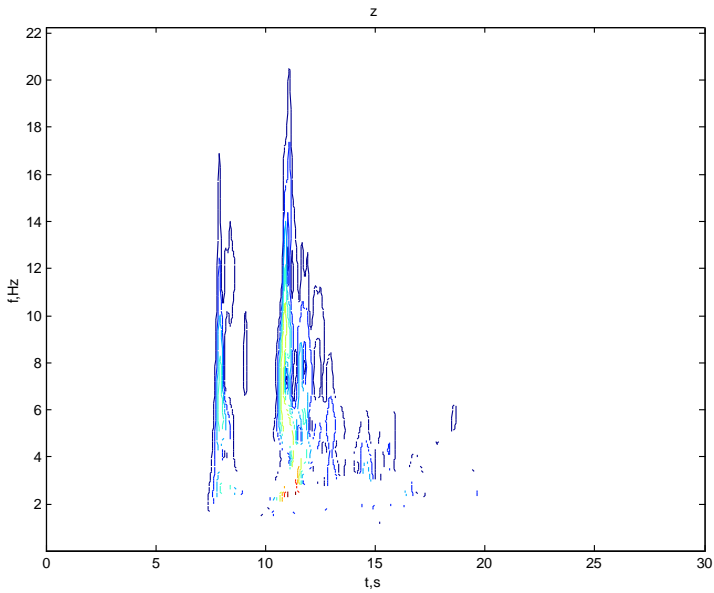


Рис. 3. Вейвлет-преобразование, амплитуда коэффициентов вейвлет преобразования.

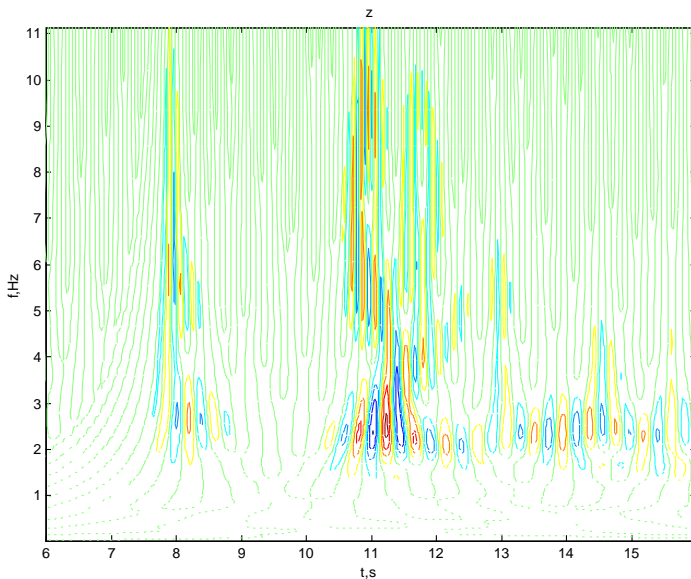


Рис. 4. Вейвлет-преобразование, действительная часть  $\Re\{ W_p(s) \}$ .

Тогда вейвлет-преобразование можно представить в следующей форме (обратного преобразования Фурье) [5]:

$$W_m(s) = \sum_{n'=0}^{N-1} \hat{x}_n \hat{\psi}^*(s w_n) e^{i\omega_n m \Delta t}, \quad (7)$$

где угловая (циклическая) частота

$$\omega_n = \begin{cases} \frac{2\pi n}{N\Delta t}, & k \leq \frac{N}{2} \\ -\frac{2\pi n}{N\Delta t}, & k > \frac{N}{2} \end{cases}$$

Используя выражение (7), полученное на основе быстрого преобразования Фурье (для каждого масштаба  $s$ ), можно выполнять вейвлет-преобразование наиболее эффективно.

Алгоритм расчета был реализован в программе MATLAB на основе функции `ifft`. Результаты расчета для нашего примера – вертикальной компоненты записи землетрясения, представленных на рис. 3 и 4, длиной 8192 отсчета на современном офисном компьютере (i7 2600k 3,4ГГц, ОЗУ 2 Гб, ОС Win 7) – составили по формуле (3) – 644,51 с, а с использованием быстрого преобразования Фурье по формуле (7) 0,053 с, т. е. скорость расчетов увеличилась более, чем в 10000 раз. Следует отметить, что, в отличие от стандартных функций вейвлет-преобразования в данном случае рассчитывались с одинаковым шагом по времени, соответствующему шагу дискретизации исходного сигнала, т. е. разложение изначально «избыточно», что необходимо для более удобного графического представления результатов, задача сжатия сигнала в данном случае не ставится.

## Выводы

Вейвлет-преобразование представляет собой мощный инструмент анализа сейсмологических данных. Показаны возможности использования вейвлет-анализа для выделения различных сигналов на сейсмограммах на примере конкретного события.

На основе быстрого преобразования Фурье (БПФ) реализован алгоритм быстрого дискретного вейвлет-преобразования (ДВП). Программное обеспечение реализовано в среде MATLAB и может найти применение при обработке данных различной природы.

Использование разработанного алгоритма позволяет выполнить анализ больших объемов инструментальных данных, в частности, записей сильных землетрясений с целью изучения спектрально-временных особенностей сильных движений в ближней зоне и разработки моделей сейсмических воздействий.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Заалишвили В. Б., Невская Н. И., Макиев В. Д., Мельков Д. А. Интерпретация инструментальных данных процесса схода ледника Колка 20 сентября 2002 года // Вестник Владикавказского научного центра. 2005. Т. 5, № 3. С. 43–54.
2. Заалишвили В. Б., Мельков Д. А. Особенности процесса схода ледника Колка 20 сентября 2002 г. и его макросейсмическое проявление по инструментальным данным современных регистрационных систем // Геология и геофизика Юга России. 2012. № 3. С. 29–44.
3. Заалишвили В. Б., Дзэбоев Б. А., Мельков Д. А. Возможности вейвлет-анализа метеорологических данных // Труды молодых ученых. 2010. № 3. С. 212–216.
4. Воробьев В. И., Грибунин В. Г. Теория и практика вейвлет-преобразования. ВУС, 1999.
5. A Practical Guide to Wavelet Analysis, Christopher Torrence and Gilbert P. Compo, Bullentin of the American Meteorological Society. Vol. 79. No. 1. January 1998.
6. Farge, M., 1992: Wavelet transforms and their applications to turbulence. Annu. Rev. Fluid Mech., 24. 395–457.

