ЛИТЕРАТУРА

1. *Волик М. В.* Скорость движения воздуха и энергия турбулентности в уличных каньонах с разной высотой домов по сторонам улиц // Научно-практическая конференция, посвященная дню эколога «Природа. Общество. Человек». Владикавказ: СКГМИ (ГТУ), 2011. С. 8–12.

2. Ресурсы технологической платформы программы «Университетский кластер», http://unihub.ru.

———— ✧ ————

УДК 51–1

Мл. научн. сотр. ***Кусраева З. А.***
Южный математический институт
Владикавказского научного центра РАН
и Правительства РСО-Алания,
г. Владикавказ

ТЕОРЕМА РАДОНА–НИКОДИМА ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ПОЛИНОМОВ

Доказано, что аналог классической теоремы Радона–Никодима имеет место для орторегулярных полилинейных операторов и для положительных ортогонально аддитивных полиномов в порядково полных векторных решетках.

Введение

В последние годы значительный интерес вызывают порядковые свойства полиномов в векторных решетках. В настоящее время наибольший прогресс достигнут в изучении класса ортогонально аддитивных полиномов. В частности, в [2] получено представление однородных полиномов в виде композиции положительного оператора и специального однородного полинома степенного вида. Теоремы о представлении указанного вида полиномов фактически сводят исследование положительных ортогонально аддитивных однородных полиномов к изучению линейных положительных операторов в векторных решетках и степенного отображения в f-алгебрах.

В цикле работ Д. Магарам построена теория положительных операторов (см. обзор) [17]. В частности, в [18] введены порядково непрерывные операторы в пространствах измеримых функций, сохраняющие порядковые отрезки, которые ныне принято называть операторами Магарам**.** В работе [16] часть теории Магарам была распространена на линейные положительные операторы в K-пространствах и, в частности, была установлена теорема типа Радона–Никодима для этого класса операторов.

Цель настоящей заметки – получить вариант теоремы Радона–Никодима.

Необходимые сведения о векторных решетках и положительных операторах имеются в книгах [1, 3].

2. Степень векторной решетки

В первую очередь введем понятие степени векторной решетки.

Определение 1. Пусть $2 \leq s \in N$ и E – архимедова векторная решетка. Пара ($E^{s\odot}$, $\odot_s$) называется s-й степенью E, если выполнены следующие условия:

1) $E^{s\odot}$– архимедова векторная решетка;

2) $\odot_s$: $E^s \to$ $E^{s\odot}$ – ортосимметричный решеточный s-морфизм, называемый каноническим полиморфизмом или каноническим s-морфизмом степени;

3) для любой архимедовой векторной решетки F и любого ортосимметричного решеточного s-морфизма φ: $E^s \to F$ существует единственный решеточный гомоморфизм S: $E^{s\odot} \to F$, такой что $S \circ \odot_s = \varphi$.

Это определение введено в [5]. Там же установлено, что для любой архимедовой векторной решетки E и любого натурального $2 \leq s \in \mathrm{N}$ существует единственная с точностью до решеточного изомофизма s-я степень ($E^{s\odot}$, $\odot_s$). Для удобства полагают также $E^{1\odot} = E$ и $\odot_1 = I_E$. Обозначим символом $\iota := \iota_s$ отображение

$$x \to x \odot |x| \odot \dots \odot |x|.$$

Ниже потребуются следующие полезные свойства степени векторной решетки. Выражения вида $(x^s + y^s)^{\frac{1}{s}}$ и $(x^s - y^s)^{\frac{1}{s}}$ понимаются в смысле однородного функционального исчисления [8, 12], т. е.

$$(x^s + y^s)^{\frac{1}{s}} := \varphi(x, y),\ (x^s - y^s)^{\frac{1}{s}} := \Psi(x, y),$$

где φ, Ψ: $R^s \to R$ – положительно однородные непрерывные функции, определяемые формулами:

$$\varphi(\alpha+\beta) := (\alpha^s + \beta^s)^{\frac{1}{s}},\ \Psi(\alpha+\beta) := (\alpha^s - \beta^s)^{\frac{1}{s}}$$

и

$$\alpha^s := |\alpha|^s \operatorname{sgn}(\alpha).$$

Лемма 1. Если векторная решетка E равномерно полна, то $\iota = \iota_s$ – нелинейный ортогонально аддитивный порядковый изоморфизм из Е на $E^{s\odot}$, сохраняющий модуль ($\equiv |\iota(x)| = \iota(|x|)$) и умножение на -1 ($\equiv \iota(-x) = -\iota(x)$). Более того

$$\iota\left((x^s + y^s)^{\frac{1}{s}}\right) = \iota(x) + \iota(y) \qquad (x, y \in E).$$

Доказательство. См. [11, теорема 3.1]

Лемма 2. Пусть E – равномерно полная векторная решетка и $1 \le s \in N$. Для каждого $\tau \in \mathrm{Orth}^{\infty}(E)$ оператор $\hat{\tau} := \iota \circ \tau \circ \iota^{-1}$ является ортоморфизмом в $\mathrm{Orth}^{\infty}(E^{s\odot})$, причем $D(\hat{\tau}) = \iota(D(\hat{\tau}))$. Отображение $\tau \to \hat{\tau}$ является изоморфизмом f-алгебры $\mathrm{Orth}^{\infty}(E)$ на f-алгебру $\mathrm{Orth}^{\infty}(E^{s\odot})$.

Доказательство. Здесь можно провести те же соображения, что и в [11, теорема 3.4].

Лемма 3. Пусть F – равномерно полная векторная решетка $1 \le s \in N$. Тогда существует единственная с точность до решеточного изоморфизма равномерно полная векторная решетка F° такая, что F есть s-я степень F°, т. е. $(F^{\circ})^{s\odot} = F$.

Доказательство. Доказательство проводится аналогично [11, теорема 3.3].

Лемма 4. Пусть E, F, F° и s – те же, что и в леммах *1* и *2.* Для любого инъективного решеточного гомоморфизма $h\colon E^{s\odot} \to F$ существует инъективный решеточный гомоморфизм $j\colon E \to F^\circ$ такой, что

$$h(x_1 \odot \ldots \odot x_s) = j(x_1) \overline{\odot} \ldots \overline{\odot} j(x_s) \ (x_1, \ldots, x_s \in E),$$

где $\odot\colon E^s \to E^{s\odot}$ и $\overline{\odot}\colon F^\circ \to \mathrm{F} = (F^\circ)^{s\odot}$ – канонические s-морфизмы.

Доказательство. См. [7, теорема 2.4].

3. Ортогонально аддитивные полиномы

Введем основной объект наших рассуждений, а именно, полином. Подробно о полиномах см. [9]. Всюду ниже E и F – векторные архимедовы решетки и $1 \le s \in N$.

Определение 2. Отображение P: $E \to F$ называется однородным полиномом степени s (или s-однородным полиномом), если существует s-линейный оператор φ: $E^s \to F$, такой что

$$P(x) = \varphi(x, \ldots, x) \quad (x \in E).$$

Полином P называют положительным, если $\varphi(x_1, \ldots, x_s) \ge 0$ для всех $x_1, \ldots, x_s \in E_+$, и регулярным, если он представим в виде разности двух положительных полиномов.

Определение 3. Однородный полином P называют ортогонально аддитивным, если для любых $x, y \in E$ выполняется

$$|x| \wedge |y| = 0 \Rightarrow P(x + y) = P(x) + P(y).$$

Обозначим символом $P_0^r({}^sE, F)$ множество всех регулярных ортогонально аддитивных полиномов из E в F, упорядоченное конусом всех положительных полиномов. Если векторная решетка F порядково полна, то $P_0^r({}^sE, F)$ – K-пространство.

Примером s-однородного ортогонально аддитивно положительного полинома служит отображение $x \to x^{s\odot} := x\odot \ldots \odot x$ ($x \in E$), где $\odot$ – канонический s-морфизм степени $E^{s\,\odot}$. В [2, теорема 4] установлено, что при не очень обременительных условиях любой регулярный s-однородный ортогонально аддитивный полином допускает представление в виде композиции линейного регулярного оператора и полинома $x \to x^{s\odot}$.

Теорема 1. Пусть E – равномерно полная векторная решетка, F – порядково полная векторная решетка. Тогда для любого ортогонально аддитивного регулярного s-однородного полинома P: $E \to F$ существует единственный линейный регулярный оператор $S := S_{\mathrm{p}} : E^{s\,\odot} \to F$ такой, что

$$P(x) = S(x^{s\odot})\ (x \in E). \tag{1}$$

Более того, отображение $P \to S_{\mathrm{p}}$ есть решеточный изоморфизм $P_0^r({}^sE, F)$ на $L^r(E^{s\,\odot}, F)$.

Определение 4. Пусть E и F – векторные решетки, а P: $E \to F$ – положительный ортогонально аддитивный полином. Говорят, что P сохраняет порядковые отрезки или обладает свойством Магарам, если для любых $x \in E_+$ и $0 \le f \le P(x) \in F_+$ существует $0 \le e \le x$ такой, что $f = Pe$ или, короче, $P([0, x]) = [0, Px]$. Полином P называют полиномом Магарам, если он порядково непрерывен и сохраняет порядковые отрезки (т. е. обладает свойством Магарам).

4. Теорема Радона–Никодима

Для доказательства теоремы Радона–Никодима для полиномов нам понадобится следующий вспомогательный факт.

Лемма 5. Пусть E и F – некоторые K-пространства и P: $E \to F$ положительный ортогонально аддитивный полином, причем $P(x) = S(x^{s\odot})$ ($x \in E$) для некоторого линейного положительного оператора S: $E^{s\odot} \to F$. Тогда P является полиномом Магарам в том и только в том случае, когда S также является оператором Магарам.

Доказательство. Предположим сначала, что $S[0, u] = [0, S(u)]$ для любого $0 \le u \in E^{s\odot}$. Возьмем такие $x \in E_+$ и $f \in F_+$, что $f \le P(x) = S(x^{s\odot})$. В силу нашего предположения существует $\upsilon \le x^{s\odot}$ такой, что $S(\upsilon) = f$. *Если* взять $y := \iota^{-1}(\upsilon)$, то $0 \le y \le x$, $\upsilon = y^{s\odot}$ и, стало быть, $f = S(\upsilon) = S(y^{s\odot}) = P(y)$. Наоборот, если P сохраняет порядковые отрезки и $f \le S(u)$ для некоторого $u \in E^{s\odot}$, то для $x := \iota^{-1}(u)$ имеем $u = x^{s\odot}$, $f \le S(u) = P(x)$, а значит, существует $0 \le y \le x$, для которого $f = P(y)$. Положив $\upsilon := \iota(y)$, приходим к требуемому: $0 \le \upsilon \le u$ и $f = S(\upsilon)$.

Далее заметим, что отображение $x \to x^{s\odot}$ порядково непрерывно (ср. [11, предложение 3.2 (3)], поэтому из порядковой непрерывности S вытекает порядковая непрерывность P. В то же время, если P порядково непрерывен и $u_a \downarrow 0$, $u_a \in E^{s\odot}$, то

$$x_s := \iota^{-1}(u_a) \downarrow 0 \text{ и } S(u_a) = P(x_a) \downarrow 0.$$

Теорема 2. (Теорема Радона–Никодима для ортогонально аддитивных полиномов). Пусть E и G – некоторые K-пространства, а P и Q – положительные s-однородные ортогонально аддитивные полиномы из E в G. Если Q – полином Магарам, то эквивалентны следующие утверждения:

(1) $P \in \{Q\}^{\perp\perp}$;

(1) $P(x) \in \{Q(x)\}^{\perp\perp}$ для всех $x \in E_+$;

(2) существует ортоморфизм $0 \le \rho \in \mathrm{Orth}^{\infty}(E)$, такой, что

$$P(x) = Q(\rho x) \ (x \in \mathrm{D}(\rho));$$

(4) существует возрастающая последовательность положительных ортоморфизмов (ρ_n), $\rho_n \in \mathrm{Orth}(E)_+$, такая, что имеет место представление:

$$P(x) = \sup Q(\rho_n x) \qquad (x \in E_+).$$

Доказательство. Нужно лишь показать, что каждое из утверждений (1)–(4) эквивалентно соответствующему утверждению из теоремы Люксембурга–Шэпа, см. [1, теоремы 3.4.9]. В силу теоремы 1 существуют линейные положительные операторы S, $T: E^{s\odot} \to F$ такие, что $P(x) = S(x^{s\odot})$ и $Q(x) = T(x^{s\odot})$ для всех $x \in X$. По лемме 5 T–оператор Магарам и $S \in \{T\}^{\perp\perp}$. В соответствие с теоремой Люксембурга–Шэпа мы можем подобрать такой ортоморфизм $0 \le \overline{\rho} \in \mathrm{Orth}^{\infty}(E^{s\odot})$, что $S(x) = T(\overline{\rho}x)$ ($x \in D(\overline{\rho})$). Ввиду леммы 2 найдется $0 \le \rho \in \mathrm{Orth}^{\infty}(E)$, для которого $\overline{\rho} = \hat{\rho}$. Из всего сказанного видно, что для любого $0 \le x \in D(\hat{\rho}) = \iota\,(D(\rho))$ справедлива цепочка равенств:

$$P(x) = S(x^{s\odot}) = T(\overline{\rho}\,x^{s\odot}) = T(\iota \circ \rho \circ \iota^{-1}\iota\,(x)) = T((\rho x)^{s\odot}) = Q(\rho x).$$

Для произвольного $x \in D(\hat{\rho})$, учитывая ортогональную аддитивность Q, имеем

$$P(x) = P(x^{+}) + (-1)^{s}P(x^{-}) = Q(px+) + (-1)^{s}Q(\rho x^{-}) =$$
$$= Q(\rho x^{+} - \rho x^{-}) = Q(\rho x).$$

Ясно также, что если $P\big|_{D(\rho)} = Q \circ \rho$, $P \in \{\mathrm{Q}\}^{\perp\perp}$. Таким образом, доказана эквивалентность (1) и (3). Остальные эквивалентности доказываются аналогично с помощью привлечения соответствующих пунктов из теоремы Люксембурга–Шэпа и лемм 2 и 3.

ЛИТЕРАТУРА

l. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы // М.: Наука, 2003.

2. *Кусраева 3. А.* О представлении ортогонально аддитивных полиномов // Сиб. мат. журн. Том 52(2011), № 2. С. 315–325.

3. *Aliprantis C. D., and Burkinshaw O. Positive Operators* // Acad. Press Inc., London, 1985.

4. *Benyamini Y., Lassalle S., Llavona J. G.* Homogeneous orthogonally additive polynomials on Banach lattices // Bull. London Math. Soc. 2006. 38(3). P. 459–469.

5. *Boulabier K., Buskes G.* Vector lattice powers: f-algebras and functional calculus // Communication in Algebra. 2006. vol. 34. P. 1435–1412.

6. *Bu Q., Buskes G.* Polynomials on Banach lattices and positive tensor products spaces // J. Math. Anal. Appl. 2012. 388. P. 845–862.

7. *Buskes G., Kusraev A. G.* Representation and extension of orthoregular bilinear operators // Vladikavkaz Math. J. 2007. 9(1). P. 16–29.

8. *Buskes G., de Pagter B., and van Rooij A.* Functional calculus in Riesz spaces // Indag. Math. (N.S.), 1991. 4(2). P. 423–436.

9. *Dineen S.* Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces // Springer, Berlin, 1999.

10. *Ibort A., Linares P., Llavona J. G.* A representation theorem for orthogonally additive polynomials on Riesz spaces // arXiv:1203.2379vl. 2012.

11. *Kusraev A.G.* A Radon -Nikodym type theorem for orthosymmetric bilinear operators // Positivity. 2010. 14(2).

12. *J. Lindenstrauss and L.* Tzafriri Classical Banach Spaces. Vol. 2. Function Spaces // Springer-Verlag, Berlin etc., 1979.

13. *Linares P.* Orthogonal additive polynomials and applications //PhD. Departamento de Analisis Matematico. Universidad Complutense de Madrid, 2009.

14. *Loan J.* Polynomials on Riesz spaces // J. Math. Anal, and Appl. 2010. 364. P. 71–78.

15. *Luxemburg, W. A. J., de Pagter B.* Maharam extension of positive operators and f-*algebras* // Positivity. 2001. vol. 6. № 2. P. 147–190.

16. *Luxemburg, W. A. J. and Schep, A. A* Radon Nikodym type theorem for positive operators and a dual // Indag. Math. 1978. 10. P. 357–375.

17. *Maharam D.* On positive operators // Contemporary Math. 1984. 26. P. 263–277.

18. *Maharam, D.* The representation of abstract integrals // Trans. Amer. Math. Soc. 1953. 75(1). P. 154–184.

19. *Perez-Garcia D., Villanueva I.* Orthogonally additive polynomials on spaces of continuous functions // J. Math. Anal. Appl. 2005. 306 (1). P. 97–105.

УДК 511–33

О ПОЛУГРУППЕ ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЙ

Младший научный сотрудник ***Чшиев А. Г.,***
Южный математический институт
Владикавказского научного центра РАН
и Правительства РСО-Алания,
г. Владикавказ

Работа посвящена полугруппам линейных отношений, которые являются естественным обобщением понятия полугруппы линейных ограниченных операторов. В работе исследуются полугруппы линейных отношений, полученные путем обращения полугрупп линейных ограниченных операторов различного класса. Большое внимание в работе уделено виду генераторов обращенной полугруппы. Свойства гладкости для полугруппы линейных отношений определяются посредством понятия траектории точки.