10. *Ibort A., Linares P., Llavona J. G.* A representation theorem for orthogonally additive polynomials on Riesz spaces // arXiv:1203.2379vl. 2012.

11. *Kusraev A.G.* A Radon -Nikodym type theorem for orthosymmetric bilinear operators // Positivity. 2010. 14(2).

12. *J. Lindenstrauss and L.* Tzafriri Classical Banach Spaces. Vol. 2. Function Spaces // Springer-Verlag, Berlin etc., 1979.

13. *Linares P.* Orthogonal additive polynomials and applications //PhD. Departamento de Analisis Matematico. Universidad Complutense de Madrid, 2009.

14. *Loan J.* Polynomials on Riesz spaces // J. Math. Anal, and Appl. 2010. 364. P. 71–78.

15. *Luxemburg, W. A. J., de Pagter B.* Maharam extension of positive operators and f-*algebras* // Positivity. 2001. vol. 6. № 2. P. 147–190.

16. *Luxemburg, W. A. J. and Schep, A. A* Radon Nikodym type theorem for positive operators and a dual // Indag. Math. 1978. 10. P. 357–375.

17. *Maharam D.* On positive operators // Contemporary Math. 1984. 26. P. 263–277.

18. *Maharam, D.* The representation of abstract integrals // Trans. Amer. Math. Soc. 1953. 75(1). P. 154–184.

19. *Perez-Garcia D., Villanueva I.* Orthogonally additive polynomials on spaces of continuous functions // J. Math. Anal. Appl. 2005. 306 (1). P. 97–105.

УДК 511–33

О ПОЛУГРУППЕ ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЙ

Младший научный сотрудник ***Чшиев А. Г.,***
Южный математический институт
Владикавказского научного центра РАН
и Правительства РСО-Алания,
г. Владикавказ

Работа посвящена полугруппам линейных отношений, которые являются естественным обобщением понятия полугруппы линейных ограниченных операторов. В работе исследуются полугруппы линейных отношений, полученные путем обращения полугрупп линейных ограниченных операторов различного класса. Большое внимание в работе уделено виду генераторов обращенной полугруппы. Свойства гладкости для полугруппы линейных отношений определяются посредством понятия траектории точки.

Стоит также отметить работу [2], где вводится определение и получен ряд результатов относительно полугрупп неограниченных операторов.

Используемые ниже понятия из теории линейных отношений можно найти в монографиях [4, 5], а также в статьях [3, 6].

Данная работа написана в духе современного подхода к исследованию полугрупп, определяющего генераторы полугруппы как линейные отношения [6].

Пусть X – комплексное банахово пространство. Через $EndX$ обозначим банахову алгебру линейных ограниченных операторов, действующих в X. Множество всех линейных отношений на X обозначим через $LR(X)$. Множество линейных операторов, действующих в пространстве X обозначим через $LO(X)$. Таким образом, при отождествлении оператора с его графиком, имеют место следующие включения:

$$EndX \subset LO(X) \subset LR(X).$$

Определение. *Полугруппой линейных отношений* на подпространстве $X_0 \subset X$ называется функция $S:(0,\propto) \to LR(X)$ со свойством

$$S(t+s)x = S(t)S(s)x, t, s > 0,$$

для любого $x \in X_0$. Функция S называется полугруппой линейных отношений, если $X_0 = X$.

Образом и ядром полугруппы линейных отношений S будем называть соответственно множества

$$ImS = \bigcup_{t>0} ImS(t) \text{ и } KerS = \bigcap_{t>0} KerS(t),$$

где через $ImS(t)$ и $KerS(t)$ обозначены соответственно образ и ядро отношения $S(t)$.

Полугруппы линейных отношений возникают (см. например [7]) при исследовании задачи продолжения решения $x:[0,\infty) \to X$ Абстрактной задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), t \geq 0, \\ \quad x(0) = x_0. \end{cases} \qquad (*)$$

на полуось R_-. Данная задача связана с исследованием полугруппы

$$S : (0, \infty) \to LR(X), S(t) = T(t)^{-1}, t > 0,$$

обратной к полугруппе операторов

$$T : (0, \infty) \to EndX, T(t)x_0 = x(t),$$

решений абстрактной задачи Коши (*). При этом, полугруппа S тогда и только является полугруппой линейных операторов, когда операторы полугруппы T инъективны (например, для полугруппы класса (C_0). В противном случае, функция S является полугруппой линейных отношений. Дадим точные определения.

Основные определения и некоторые результаты для полугрупп линейных отношений

Всюду далее через S обозначена полугруппа линейных отношений на подпространстве X_0. Для полугруппы линейных отношений существенными являются подпространства из X вида

$$D_1(S) = \bigcap_{t>0} D(S(t)),$$

$$D_2(S) = \bigcap_{t>0} D(S(t)S(s)),$$

где $D(S(t))$ – есть область определения отношения $S(t)$. Ясно, что именно на подпространстве $D_2(S)$ выполняется полугрупповое свойство.

Имеют место соотношения множеств:

$$X_0 \subset D_2(S) \subset D_1(S).$$

Определение. Траекторией точки x относительно полугруппы линейных отношений S на подпространстве X_0 называется векторная функция

$$\xi_x : [0, \infty) \to X$$

со свойствами

$$\xi_x(0) = x, \xi_x(t) \in S(t)x, t > 0.$$

Отметим, что из определения следует, что только точки из $D_1(S)$ имеют траекторию относительно полугруппы S. Кроме того, траектория точки в общем случае неединственная.

Для полугруппы линейных отношений следующим образом можно определить свойства гладкости.

Определение. Полугруппа линейных отношений S на подпространстве X_0 называется сильно непрерывной на подпространстве $Y \subset X_0$ если для каждого $x \in Y$ траектория ξ_x непрерывна на интервале $(0, \infty)$. Полугруппа S называется сильно непрерывной, если $Y = X_0$

Генераторы полугруппы линейных отношений

Введем определения генератора полугруппы линейных отношений на подпространстве.

Определение. Инфинитезимальным линейным отношением полугруппы линейных отношений S на подпространстве X_0 называется линейное отношение $G_0 \in LR(X)$, состоящее из пар $(x, y) \in X_0 \times X$ таких, что траектория ξ_x точки x дифференцируема и связана с траекторией точки y следующим образом: $\xi_x'(t) = \xi_y(t)$ для всех $t \geq 0$.

Для полугруппы операторов T отношение G_0 совпадает с инфинитезимальным оператором A_0 [6].

Определение. Старшим генератором полугруппы линейных отношений S на подпространстве X_0 называется линейное отношение $\mathbb{G} \in LR(X)$, состоящее из пар(x, y) со свойствами:

$$x \in D(\mathbb{G}),$$

где подпространство $D(\mathbb{G})$ состоит из векторов$x \in X_0$, для которых траектория ξ_x дифференцируема на $(0, \propto)$ и $\xi_x{}'(t) = \xi_y(t)$ для всех $t > 0$.

Для полугруппы операторов T отношение $\mathbb{G}$ совпадает со старшим генератором $\mathbb{A}$ [6].

Определение. *Генератором* полугруппы линейных отношений S на подпространстве X_0 называется отношение $\mathcal{G} \in LR(X)$, удовлетворяющееусловиям: 1) $G_0 \subset \mathcal{G} \subset \mathbb{G}$; 2) для каждых $(x, y) \in \mathcal{G}$ и $t > 0$ следует $(\xi_x(t), \xi_y(t)) \in \mathcal{G}$. Генератор $\mathcal{G}$ называется базовым, если резольвентное множество $\rho(\mathcal{G})$ генератора $\mathcal{G}$ содержит полуплоскость

$$C_w = \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\,\lambda > w\}$$

для некоторого $w \in \mathbb{R}$.

Обращение полугруппы операторов

Для лучшего понимания полугрупп линейных отношений рассмотрим полугруппу линейных отношений, получающуюся путем обращения (возможно вырожденной) полугруппы операторов. В работе через Tи Sобозначены соответственно полугруппы

$$T : (0, \infty) \to EndX \text{ и } S : (0, \propto) \to LR(X), S(t) = T(t)^{-1}.$$

Введем подпространство

$$Y_S = \cup_{t,s>0}\{T(s)y : y \in ImT(t)\} = \cup_{t,s>0}\{T(s)T(t)x : x \in X\}.$$

Теорема 1.ФункцияSесть сильно непрерывная в нуле справа полугруппа линейных отношений на подпространстве Y_S.

Доказательство. Ясно, что $S(t) \in LR(X), t > 0$. Полугрупповое свойство выполняется на подпространстве $D_2(S) = Y_S$. Таким образом, функция S есть полугруппа линейных отношений на подпространстве Y_S.

Для $u \in Y_S$ рассмотрим траекторию ξ_uточки u. Отметим, что $\xi_{T(t)u}(t)) = u$ для всех $u \in X$ и $t > 0$. Так как $u \in Y_S$, то существуют $t_0 > 0$ и $v \in X$такие, что $u = T(t_0)v$. Для $t < t_0$ имеем:

$$||\xi_u(t)u - u|| = ||\xi_{T(t_0)v}(t)) - T(t_0)v|| =$$
$$= ||\xi_{T(t)T(t_0-t)v}(t) - T(t_0)v|| = \left||T(t_0 - t)v - T(t_0)v\right|| \to 0$$

при $t \to 0+$. Следовательно, S – сильно непрерывная в нуле справа полугруппа линейных отношений на подпространстве Y_S. Теорема доказана.

Продолжим изучение полугруппы S. Исследуем свойство сильной дифференцируемости полугруппы S (т. е. дифференцируемости траектории точки относительно полугруппы S или, что то же самое, сильной дифференцируемости траектории ξ_u). Пусть $u \in Y_S$. Тогда существуют $t_0 > 0$ и $v \in X$ такие, что $u = T(t_0)v$и для $0 < t < t_0$ имеем:

$$\lim_{t\to 0+} \frac{\xi_u(t) - u}{t} = \lim_{t\to 0+} \frac{\xi_{T(t_0)v}(t)) - T(t_0)v}{t} =$$
$$= \lim_{t\to 0+} \frac{\xi_{T(t)T(t_0-t)v}(t) - T(t_0)v}{t} = \lim_{t\to 0+} \frac{T(t_0 - t)v - T(t_0)v}{t} =$$
$$= -\dot{T}(t_0)v.$$

Так как

$$\dot{T}(t_0)v = -T(t_0)A_0 v = -A_0 T(t_0)v = -A_0 u,$$

то траектория ξ_u дифференцируема в нуле справа тогда и только тогда когда $u \in D(A_0)$.

Таким образом, имеет место

Теорема 2. Инфинитезимальное отношение (оператор) G_0 полугруппы S имеет вид$D(G_0) = Y_S \cap D(A_0), G_0 u = -A_0 u,$ где A_0- есть инфинитезимальный оператор полугруппы T.

Определим вид старшего генератора полугруппы S. Пусть $u \in Y_S$ и пусть $u = T(t_0)x$. Рассмотрим траекторию ξ_u точки u. Для $t < t_0$ и $0 < h < t_0 - t$ имеем:

$$\dot{\xi_u}(t) = \lim_{h\to 0+} \frac{\xi_u(t+h) - \xi_u(t)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{\xi_{T(t_0)x}(t+h) - \xi_{T(t_0)x}(t)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{\xi_{T(t_0-t-h)T(t+h)x}(t+h) - \xi_{T(t)x}(t_0-t)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{T(t_0-t-h)x - T(t_0-t)x}{h} = -\dot{T}(t_0-t)x.$$

Следовательно, траектория ξ_u дифференцируема на $(0, t_0)$ тогда и только тогда когда функция $t \longmapsto T(t)x$ дифференцируема на $(0, t_0)$. Значит, вектор u принадлежит области определения $D(\mathbb{G})$ старшего генератора $\mathbb{G}$ полугруппы S тогда и только тогда, когда $x \in D(\mathbb{A})$. Пусть $(x, y) \in \mathbb{A}$, и $w = T(t_0)y$. Тогда $\dot{T}(t)x = = T(t)y$ для любого $t > 0$.

Заметим, что

$$\xi_w(t) = \xi_w(t) = \xi_{T(t_0)y}(t) = \xi_{T(t_0-t)T(t)y}(t) = T(t_0-t)y.$$

Поэтому $\dot{\xi_u}(t) = \xi_w(t)$для $t < t_0$. Таким образом, имеет место

Теорема 3. Старший генератор полугруппы S имеет вид:

$$\mathbb{G} = \{(T(t)x, -T(t)y) : T(t)x \in Y_S, t > 0, \qquad \text{где } (x, y) \in \mathbb{A}\},$$

где $\mathbb{A}$ – старший генератор полугруппы T.

Следуя аналогии, получаем следующий результат.

Теорема 4. Пусть $\mathcal{A}$ – генератор полугруппы T. Тогда линейный оператор

$$\mathcal{G} = \{(T(t)x, -T(t)y) : T(t)x \in Y_S, t > 0, \text{где } (x, y) \in \mathcal{A}\}$$

является генератором полугруппы S.

Доказательство. Включение $\mathcal{G} \subset \mathbb{G}$ следует непосредственно из определения операторов $\mathcal{G}, \mathbb{G}$ и включения $\mathcal{A} \subset \mathbb{A}$. Достаточно показать включение $G_0 \subset \mathcal{G}$. Пусть $(u, w) \in G_0$. Тогда

$u \in Y_S \cap D(A\_0)$. Поэтому существуют $t_0 > 0$ и $x \in X$ такие, что $u = T(t_0)x$ и

$$w = G_0 u = -\dot{T}(t_0)x = -A_0 T(t_0)x.$$

Так как $T(t_0)x \in D(A_0)$, то $x \in D(\mathcal{A})$, для $\mathcal{A} \in Gen(T)$. Значит, существует $y \in X : (x, y) \in \mathcal{A}$. Это значит, что $\dot{T}(t_0)x = T(t_0)y$. Следовательно, $T(t_0)y = w$. По определению отношения $\mathcal{G}$, заключаем, что $(u, w) \in \mathcal{G}$.

Пусть $(u, v) \in \mathcal{G}$. Покажем, что $(\xi_u(t), \xi_v(t)) \in \mathcal{G}$ для любых $t > 0$. Имеем: $(u, v) = (T(t_0 x, -T(t_0)y)$ для некоторых

$$t_0 > 0 \text{ и } (x, y) \in \mathcal{A}.$$

Так как

$$\xi_u(t) = T(t_0 - t)x,\ \xi_v(t) = T(t_0 - t)y,$$

то $(\xi_u(t),\ \xi_v(t)) \in \mathcal{G}$ для любых $0 < t < t_0$. Пусть $0 < t, h < t_0$.

Так как

$$\xi_u(t + h) = T(t_0 - t)T(t_0 - h)x = T(2t_0 - t - h)x,$$
$$\xi_v(t + h) = T(t_0 - t)T(t_0 - h)y = T(2t_0 - t - h)y,$$

то $(\xi_u(t), \xi_v(t)) \in \mathcal{G}$, для любых $0 < t < 2t_0$. Продолжая аналогичные рассуждения, получаем $(\xi_u(t), \xi_v(t)) \in \mathcal{G}$ для любых $0 < t < nt_0$, для любого $n \in \mathbb{N}$. Теорема доказана.

Теорема. Пусть T – полугруппа непрерывно обратимых операторов, и пусть $\mathcal{A}$ – генератор полугруппы T. Тогда $-\mathcal{A}$ является генератором полугруппы S.

Доказательство. Операторы полугруппы T сюрьективны, поэтому линейный оператор

$$\mathcal{G} = \{(T(t)x, -T(t)y), t > 0 : (x, y) \in \mathcal{A}\},$$

где $\mathcal{A}$ есть генератор полугруппы T является генератором полугруппы S. Устремляя $t \to 0$, заключаем, что $-\mathcal{A} \subset \bar{\mathcal{G}}$.

Так как $\bar{\mathcal{G}}$ есть генератор полугруппы S, то – $\mathcal{A}$ есть генератор полугруппы S. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хилле Э.* Функциональный анализ и полугруппы / Э.Хилле, Р.Филлипс. М.: ИЛ, 1962.

2. *Hughes Rhonda Jo*. Semigroups of Unbounded Linear Operators in Banach Space/Rhonda Jo Hughes// Transactions of the American Mathematical Society. 1977 Vol. 230. Pp. 113–145.

3. *Баскаков А. Г.* Спектральный анализ дифференциальных операторовс неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношенияи полугруппы разностных отношений / А. Г. Баскаков // Изв. РАН. Серия матем. 2009. Т. 73. № 2. С. 3–68.

4. *Cross R.* Multivalued linear operators/ R. Cross. New York: M. Dekker. 1998.

5. *Favini A., Yagi A.* Degenerate differential equations in Banach spaces / A. Favini, A. Yagi. New York: M. Dekker. 1998.

6. *Баскаков А. Г.* Линейные отношения как генераторы полугрупп операторов / А. Г. Баскаков // Матем. заметки. 2008. Т. 84. № 2. С. 175–192.

7. *Загорский А. С.* О полугруппах линейных отношений / А. С. Загорский // Вестник ВГУ. 2004. № 2. С. 158–161.

УДК 51–7

ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕОДНОРОДНЫХ СВОЙСТВ СЛОИСТЫХ СРЕД

Богачев И. В.,
Дударев В. В.,
Ватульян А. О.,
Углич П. С.,
канд. физ.-мат. наук, доц. ***Явруян О. В.***
Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону
Южный математический институт ВНЦ РАН
и Правительства РСО-А,
г.Владикавказ

Обратные коэффициентные задачи об определении свойств материалов и предварительного напряженного состояния имеют широкое приложение в различных областях науки и техники – горная механика, сейсморазведка, строительство, наномеханика, механика функционально-