

ЛИТЕРАТУРА

1. Хилле Э. Функциональный анализ и полугруппы / Э.Хилле, Р.Филлипс. М.: ИЛ, 1962.
2. Hughes Rhonda Jo. Semigroups of Unbounded Linear Operators in Banach Space/Rhonda Jo Hughes// Transactions of the American Mathematical Society. 1977 Vol. 230. Pp. 113–145.
3. Баскаков А. Г. Спектральный анализ дифференциальных операторов неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения полугруппы разностных отношений / А. Г. Баскаков // Изв. РАН. Серия матем. 2009. Т. 73. № 2. С. 3–68.
4. Cross R. Multivalued linear operators/ R. Cross. New York: M. Dekker. 1998.
5. Favini A., Yagi A. Degenerate differential equations in Banach spaces / A. Favini, A. Yagi. New York: M. Dekker. 1998.
6. Баскаков А. Г. Линейные отношения как генераторы полугрупп операторов / А. Г. Баскаков // Матем. заметки. 2008. Т. 84. № 2. С. 175–192.
7. Загорский А. С. О полугруппах линейных отношений / А. С. Загорский // Вестник ВГУ. 2004. № 2. С. 158–161.



УДК 51–7

**ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕОДНОРОДНЫХ СВОЙСТВ
СЛОИСТЫХ СРЕД**

**Богачев И. В.,
Дударев В. В.,
Ватульян А. О.,
Углич П. С.,**

канд. физ.-мат. наук, доц. **Явруян О. В.**
Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону
Южный математический институт ВНЦ РАН
и Правительства РСО-А,
г.Владикавказ

Обратные коэффициентные задачи об определении свойств материалов и предварительного напряженного состояния имеют широкое приложение в различных областях науки и техники – горная механика, сейсмозащита, строительство, наномеханика, механика функционально-

градиентных и новых композиционных материалов и особенно важны в биомеханике. При этом эффективные схемы реконструкции неоднородных свойств и предварительных напряжений по данным акустического зондирования и вычислительные алгоритмы, построенные на их основе, являются актуальными задачами механики деформируемого твердого тела.

На базе итерационных регуляризирующих алгоритмов, разработаны вычислительные схемы и комплексы программ для решения обратных коэффициентных задач идентификации неоднородных свойств материалов и выявлены наиболее эффективные с точки зрения идентификации режимы нагружения и съема данных. Представлены численные результаты восстановления неоднородных свойств слоистых структур.

Вопросы идентификации апробированных моделей в механике связаны с широким внедрением в практику функционально градиентных материалов, совершенствованием и уточнением моделей в механике и геофизике. В условиях, когда структура математической модели исследуемого объекта известна, проблема идентификации сводится к определению параметров объекта исследования, характеризующих его свойства, задающиеся коэффициентами дифференциальных операторов математической модели. В теории обратных задач они выделяются в отдельный важный класс обратных коэффициентных задач.

Задачи восстановления свойств особенно важны в строительной промышленности, материаловедении, гео- и сейсмороазведке, при изучении новых конструкционных материалов и особенно актуальны в биомеханике. Без надежного определения параметров моделей невозможно решать задачи диагностики и выявления патологий, научно обоснованных методик подбора и расчета имплантантов, протезов и замещающих тканей.

Количественное определение неоднородных характеристик материалов позволит моделировать поведение механических объектов сред со сложной структурой и существенно неоднородными свойствами, которые активно используются в последние годы.

Работа посвящена задачам реконструкции неоднородных свойств слоистых структур в рамках линейной теории упругости для изотропных и ортотропных сред. Реконструкция неоднородных свойств осуществлена по полям смещений (Задача 2) или по интегральных характеристикам полей смещений (осредненным

значениям) (Задача 1), измеренным на верхней границе слоя при возбуждении в нем установившихся колебаний.

Математические модели слоистых сред с неоднородными свойствами находят применение в различных областях науки и техники – биомеханика, горная механика, сейсморазведка, строительство, наномеханика, механика функционально-градиентных и новых композиционных материалов.

Современное состояние задач идентификации неоднородных свойств слоистых структур является малоисследованным. Основное внимание исследователей сосредоточено на решении обратных коэффициентных задач в рамках однородных моделей, характеризующихся конечным набором физических постоянных, при этом пространство поиска параметров конечномерно, вычислительные схемы их идентификации на основе анализа отклика на динамическое возмущение достаточно просты и часто сводятся к процедуре минимизации функционалов невязки.

Главная трудность при исследовании коэффициентных обратных задач для слоистых структур состоит в достаточно сложной процедуре построения операторных соотношений, связывающих искомые и измеряемые функции. Это обусловлено переменностью коэффициентов дифференциальных операторов и невозможностью построения в явном виде общих представлений решений для соответствующих операторов, как это имеет место для операторов с постоянными коэффициентами.

В исследованиях зарубежных авторов представлены методики идентификации неоднородных свойств слоистых сред, где известны (измерены) физические поля всюду внутри исследуемого объекта [1–4].

В этом случае задача оказывается линейной и ее исследование сводится к решению системы дифференциальных уравнений первого порядка или к интегральному уравнению Фредгольма первого рода. Если же информация о поле смещений известна лишь на границе, то обратная задача существенно нелинейна и сводится к решению нелинейных операторных уравнений, которые содержат промежуточные переменные – компоненты физических полей. Задачи в такой постановке могут быть исследованы

лишь на основе некоторых итеративных процедур, основные принципы построения которых опираются на метод линеаризации и слабую постановку.

В данной работе предложены эффективные схемы реконструкции неоднородных свойств слоя, в основе которых лежит сведение обратной коэффициентной задачи к итерационному процессу, на каждом шаге которого осуществляется определение поправок восстанавливаемых функций относительно начальных приближений.

1. Постановка задач. Рассмотрим колебания упругого слоя толщины h , свойства которого непрерывно меняются по толщине. Нижняя грань слоя жестко закреплена. Колебания в слое вызываются нагрузкой $p_j(x, t) = p_j(x)e^{-i\omega t}$ (ω – частота колебаний), приложенной к части верхней границы слоя. Выберем оси координат следующим образом: оси Ox_1 и Ox_2 расположены на нижней грани слоя, ось Ox_3 направим перпендикулярно вверх.

Рассмотрение установившегося режима колебаний позволяет отделить временной множитель и представить компоненты вектора перемещений в виде $u_j(x, t) = u_j(x)e^{-i\omega t}$. Тогда задача о колебаниях упругого слоя после отделения временного множителя будет описываться краевой задачей

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0, \quad (1.1)$$

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} u_{k,l},$$

$$u_i |_{x_3=0} = 0, \quad \sigma_{i3} |_{x_3=h} = \begin{cases} p_i, & x_1 \in [a, b] \\ 0, & x_1 \notin [a, b] \end{cases}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3, \quad (1.2)$$

где $\rho(x_3)$, $c_{ijkl}(x_3)$ – плотность и материальные параметры слоя, которые являются функциями поперечной координаты.

Поскольку рассматриваемая область S содержит бесконечно удаленную точку, то замыкают постановку задачи условия излучения волн на бесконечности, при формулировке которых используется принцип предельного поглощения [5].

Рассмотрим две постановки обратной коэффициентной задачи.

2. Задача 1 состоит в определении неоднородных характеристик ортотропного слоя (плотность считаем постоянной) по данным акустического зондирования в режиме плоских $p = (p_1, 0, p_3)$, $u_1 = u_1(x_1, x_3)e^{-i\omega t}$, $u_3 = u_3(x_1, x_3)e^{-i\omega t}$ и антиплоских $p = (0, p_2, 0)$, $u_2 = u_2(x_1, x_3)e^{-i\omega t}$ колебаний. Реконструкция свойств слоя – функций $c_{55}(x_3)$, $c_{44}(x_3)$, $c_{33}(x_3)$, $c_{13}(x_3)$, $c_{66}(x_3)$, $c_{11}(x_3)$, осуществляется по дополнительной информации об интегральных характеристиках компонент поля смещения, измеренных на всей верхней границе слоя.

Применим преобразование Фурье к краевым задачам (1.1)–(1.2) по координате x_1 . Трансформанты соответствующих компонент поля смещения:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_i(x_3, \alpha) &= \int_{-\infty}^{+\infty} u_i(x_1, x_3) e^{i\alpha x_1} dx_1, \\ \tilde{p}_j(\alpha) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_j(x_1) e^{i\alpha x_1} dx_1.\end{aligned}$$

Разложим их по степеням параметра преобразования α :

$$\begin{aligned}\tilde{u}_1 &= u_0 + i\alpha u_1 + \alpha^2 u_2, \\ \tilde{u}_2 &= w_0 + i\alpha w_1 + \alpha^2 w_2, \\ \tilde{u}_3 &= v_0 + i\alpha v_1 + \alpha^2 v_2, \\ p_j &= p_j^{(0)} + i\alpha p_j^{(1)} + \alpha^2 p_j^{(2)}, \quad j = 1, 2, 3.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Подставляя представления (2.1) в уравнения колебания каждой из задач и выписывая коэффициенты перед одинаковыми степенями α , получим разделенные обратные коэффициентные задачи относительно соответствующих решений и функций, характеризующих упругие свойства слоя.

$$\alpha^0 : \begin{cases} (c_{55}u'_0) + \rho\omega^2 u_0 = 0 \\ u_0(0) = 0 \\ c_{55}(h)u'_0(h) = p_1^{(0)} \\ u_0(h, \omega) = f_1^{(0)}(\omega) \end{cases} \begin{cases} (c_{33}v'_0) + \rho\omega^2 v_0 = 0 \\ v_0(0) = 0 \\ c_{33}(h)v'_0(h) = p_3^{(0)} \\ v_0(h, \omega) = f_1^{(0)}(\omega) \end{cases} \begin{cases} (c_{44}w_0) + \rho\omega^2 w_0 = 0 \\ w_0(0) = 0 \\ c_{44}(h)w'_0(h) = p_2^{(0)} \\ w_0(h, \omega) = f_2^{(0)}(\omega) \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\alpha^1 : \begin{cases} (c_{55}u'_1) + \rho\omega^2 u_1 - c_{13}v'_0 - (c_{33}v_0)' = 0, \\ (c_{33}v'_1) + \rho\omega^2 v_1 - c_{55}u'_0 - (c_{13}u_0)' = 0, \\ u_1(0) = v_1(0) = 0, \\ c_{55}(h)u'_1(h) - c_{55}(h)u_0(h) = p_1^{(1)}, \\ -c_{13}(h)u_0(h) + c_{33}(h)v'_1(h) = p_3^{(1)}, \\ u_0(h, \omega) = f_1^{(0)}(\omega), \quad v_1(h, \omega) = f_3^{(1)}(\omega), \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\alpha^2 : \begin{cases} (c_{55}u'_2) + \rho\omega^2 u_2 - c_{11}u_0 + c_{13}v'_1 + (c_{55}v_1)' = 0, \\ (c_{33}v'_2) + \rho\omega^2 v_2 + c_{55}u'_1 - c_{55}v_0 + (c_{13}u_1)' = 0, \\ u_2(0) = v_2(0) = 0, \\ c_{55}(h)u'_2(h) + c_{55}(h)v_1(h) = p_1^{(2)}, \\ c_{33}(h)v'_2(h) + c_{13}(h)u_1(h) = p_3^{(2)}, \\ u_2(h, \omega) = f_1^{(2)}(\omega), \quad v_2(h, \omega) = f_3^{(2)}(\omega), \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\begin{cases} (c_{44}w'_2) - c_{66}w_0 + \rho\omega^2 w_0 = 0, \\ w_2(0) = 0, \\ c_{44}(h)w'_2(h) = p_2^{(2)}, \\ w_2(h, \omega) = f_2^{(2)}(\omega). \end{cases}$$

В приведенных задачах в качестве дополнительной информации заданы моменты первого и второго порядков от осредненных компонент полей смещений при частотном зондировании $f_i^{(j)}(\omega)$, $i = 1, 2, 3, j = 0, 1, 2$.

Процедура идентификации сводится к последовательному решению представленных задач. Стоит отметить, что краевые задачи (2.1) имеют одинаковую структуру и подобны задаче о

продольных колебаниях упругого неоднородного стержня. Схема исследования таких задач приведена в работе [6] и связана с построением итерационной процедуры, на каждом шаге которой из решения интегральных уравнений Фредгольма первого и второго родов определяются поправки восстанавливаемых функций относительно начальных приближений. Согласно этой схеме удастся восстановить неизвестные функции, характеризующие неоднородные свойства слоя с погрешностью менее 3 %. Стоит также отметить, что итерационная схема регуляризации эффективно применена при восстановлении свойств упругого изотропного слоя и электроупругой прямоугольной области, а также при исследовании обратных коэффициентных задач для многослойных структур и вязкоупругого изотропного слоя.

Идентификация $c_{11}(x_3)$, $c_{66}(x_3)$ и $c_{13}(x_3)$ осуществляется из анализа краевых задач (2.3), (2.4) и восстановленных ранее из (2.2) функций $c_{44}(x_3)$, $c_{33}(x_3)$ и $c_{55}(x_3)$. В результате несложных математических операций удастся свести обратные коэффициентные задачи к последовательному решению уравнений Фредгольма первого рода с гладкими ядрами.

$$\int_0^h c_l(x_3) K_l(x_3, \omega) dx_3 = R_l(\omega), \omega \in [\omega_1, \omega_2], l = 1, 2, 3$$

$$\bar{c} = (c_{13}, c_{11}, c_{66}), K_1(x_3, \omega) = v_0'(x_3, \omega) u_0(x_3, \omega)$$

$$K_2(x_3, \omega) = u_0^2(x_3, \omega), K_3(x_3, \omega) = w_0^2(x_3, \omega)$$

$$R_1(\omega) = p_1^{(0)} f_1^{(1)}(\omega) - p_1^{(1)} f_1^{(0)}(\omega) + \int_0^h c_{55}(x_3) v_0(x_3, \omega) u_0'(x_3, \omega) dx_3 \quad (2.5)$$

$$R_2(\omega) = -p_1^{(2)} f_3^{(0)}(\omega) - p_1^{(0)} f_3^{(2)}(\omega) -$$

$$- \int_0^h (c_{13}(x_3) v_1'(x_3, \omega) u_0(x_3, \omega) - c_{55}(x_3) v_1(x_3, \omega) u_0'(x_3, \omega)) dx_3$$

$$R_3(\omega) = -p_2^{(0)} f_2^{(1)}(\omega) - p_2^{(1)} f_2^{(0)}(\omega).$$

Решение полученных интегральных уравнений представляет собой некорректную задачу и требует применения регуляризующих алгоритмов, в данной работе использован метод Тихонова А. Н.

Следуя предложенной схеме, был проведен вычислительный эксперимент по восстановлению неизвестных функций для слоя толщины $h = 1$. В серии расчетов плотность $\rho = 1$.

Поскольку задачи идентификации $c_{55}(x_3)$, $c_{33}(x_3)$ и $c_{44}(x_3)$ схожи, поэтому в работе представлены результаты восстановления только двух функций – $c_{55}(x_3)$, $c_{33}(x_3)$, которые определяются из итерационного процесса. Начальные приближения выбирались из условия минимума функционала невязки в классе линейных функций.

Восстановление $c_{13}(x_3)$, $c_{11}(x_3)$, $c_{66}(x_3)$ осуществлено последовательно из решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода (2.5).

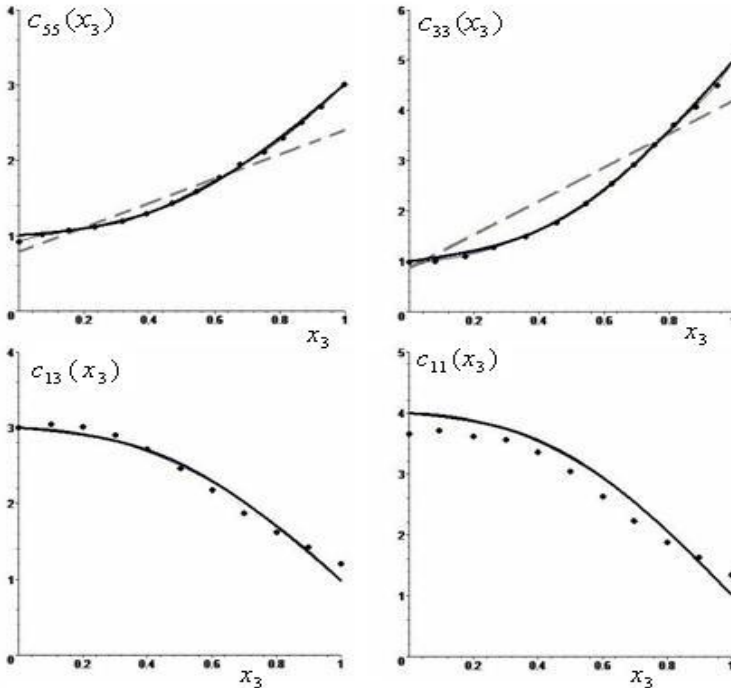


Рис.1. Реконструкция неизвестных функций $c_{55}(x_3) = 1 + 2x_3^2$, $c_{33}(x_3) = 1 + 4x_3^2$, $c_{11}(x_3) = 4 - 3x_3^2$, $c_{13}(x_3) = 3 - 2x_3^2$. Сплошной линией отмечены точные значения функций, точками – восстановленные, пунктирной – начальные приближения.

По результатам реконструкции можно заключить, что предлагаемая схема позволяет с погрешностью менее 1 % восстановить неизвестные функции $c_{44}(x_3)$, $c_{33}(x_3)$ и $c_{55}(x_3)$, в то время как погрешность идентификации $c_{11}(x_3)$, $c_{66}(x_3)$ и $c_{13}(x_3)$ порядка 6–12 %. Это связано с накоплением погрешности на первых этапах, а также с особенностью поведения ядер интегральных уравнений (2.5), которые согласно граничным условиям на конце $x_3 = 0$ обращаются в ноль, что приводит к «потере» информации в этой точке. Однако в целом схема эффективна, проста и устойчива к погрешностям входных данных и позволяет восстановить до шести неизвестных функций.

Задача 2. Рассмотрим теперь задачу об установившихся колебаниях неоднородного по толщине изотропного слоя в состоянии антиплоского сдвига $p = (0, p_2, 0)$, $u_2 = u(x_1, x_3)e^{-i\omega t}$.

Определяющие соотношения и уравнение колебаний (1.1)–(1.2) примут вид:

$$\sigma_{21} = \mu(x_3)u_{,1}, \quad \sigma_{23} = \mu(x_3)u_{,3}, \quad (3.1)$$

$$\sigma_{21,1} + \sigma_{23,3} + \rho(x_3)\omega^2 u = 0. \quad (3.2)$$

Обратная задача состоит в восстановлении функций, характеризующих модуль сдвига и плотность $\mu = \mu(x_3)$, $\rho = \rho(x_3)$, по полю перемещений, измеренному на некотором участке верхней границы $[c, d]$. В отличие от задачи 1 дополнительная информация задается на части границы и для восстановления используются сами значения полей смещений, что представляет собой более простую для практической реализации задачу.

Введём безразмерные переменные по формулам:

$$x_i = h\bar{x}_i, \quad u = h\bar{u}, \quad \mu = \mu(0)\bar{\mu}, \quad \rho = \rho(0)\bar{\rho}, \quad \sigma_{ij} = \mu_0\bar{\sigma}_{ij}, \\ \kappa^2 = \rho(0)\omega^2 h^2 \mu^{-1}(0), \quad p = \mu(0)\bar{p}.$$

(в дальнейшем знак надчёркивания опускаем).

Применим преобразование Фурье по координате x_1 к (3.1) и (3.2), в результате получаем краевую задачу

$$\begin{cases} \tilde{u}' = \frac{\tilde{\sigma}_{23}}{\mu}, \quad \tilde{\sigma}_{23} = (\mu\alpha^2 - \rho\omega^2)\tilde{u}, \\ \tilde{u}|_{x_3=0} = 0, \quad \tilde{\sigma}_{23}|_{x_3=1} = \tilde{p}(\alpha). \end{cases} \quad (3.3)$$

Краевая задача (3.3) относительно \tilde{u} , $\tilde{\sigma}_{23}$ может быть решена при помощи метода пристрелки.

Волновые поля в слое представимы в виде:

$$u(x_1, x_3) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \tilde{p}(\alpha) \frac{U_2(\alpha, x_3)}{\Sigma_2(\alpha, 1)} e^{-i\alpha x_1} d\alpha, \quad (3.4)$$

где через U_2 , Σ_2 обозначены решения вспомогательных задач Коши для уравнений краевой задачи (3.3) при начальных условиях вида:

$$U_2(\alpha, 0) = 0, \quad \Sigma_2(\alpha, 0) = 1 \quad (3.5)$$

Здесь σ – контур интегрирования, обходящий особенности подынтегральной функции в соответствии с принципом предельного поглощения 5.

Волновое поле может быть найдено по формуле (3.4) путём численного интегрирования или по теории вычетов. Особенности подынтегральной функции представляют счетное множество однократных полюсов α_n , конечное число которых – вещественные, все остальные – чисто мнимые. Выражения для волнового поля в случае, когда нагрузка на верхней поверхности представляет собой сосредоточенную силу при $p = \delta(x_1)$ и $x_1 > 0$ приобретает вид:

$$u(x_1, x_3) = i \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{U_2(\alpha, x_3)}{[\Sigma_2(\alpha, 1)]'_{\alpha}} \right\}_{\alpha=\alpha_n} \left| e^{-i\alpha_n x_1}, \quad (3.6)$$

По формуле (3.6) произведены расчёты волновых полей на верхней границе слоя для различных законов неоднородности, частный случай приведен на рис. 2.

Для решения обратной задачи воспользуемся методом возмущений и представим механические параметры слоя и неизвестные функции в виде:

$$\begin{aligned} \mu &= \mu_0(x_3) + \varepsilon \mu_1(x_3), \quad \rho = \rho_0(x_3) + \varepsilon \rho_1(x_3), \\ u &= u_0(\alpha, x_3) + \varepsilon u_1(\alpha, x_3), \quad \sigma_{23} = \sigma_0(\alpha, x_3) + \varepsilon \sigma_1(\alpha, x_3), \end{aligned} \quad (3.7)$$

где ε – формальный малый параметр, индекс «0» соответствует некоторым наперед известным функциям, «1» – функциям-поправкам к ним.

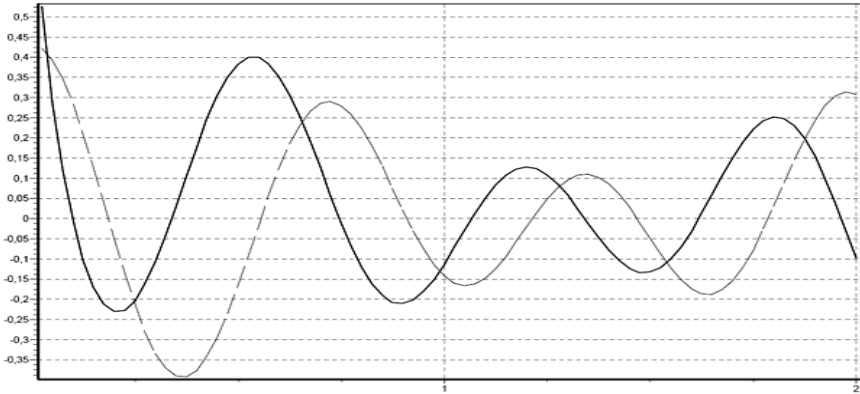


Рис. 2. Вещественная (сплошная) и мнимая (пунктир) части волнового поля при $\kappa = 10$, $\rho = \text{const}$, $\mu = \mu_0(1 + 0,2\sin^2\pi x_3)$, $x_1 \in [0, 2]$.

Подставляя (3.7) в краевую задачу (3.3) и, собирая коэффициенты при одинаковых степенях ε , имеем

$$\varepsilon^0 : \begin{cases} \tilde{u}'_0 = \frac{\tilde{\sigma}_{23}}{\mu}, \\ \tilde{\sigma}_0 = (\mu_0 \alpha^2 - \rho_0 \kappa^2) \tilde{u}_0, \\ \tilde{u}|_{x_3=0} = 0, \quad \tilde{\sigma}_0|_{x_3=1} = \tilde{p}(\alpha). \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\varepsilon^1 : \begin{cases} \tilde{u}'_1 = \frac{\tilde{\sigma}_1}{\mu_0} - \frac{\mu_1}{\mu_0'} \tilde{\sigma}_0, \\ \tilde{\sigma}_1 = (\mu_0 \alpha^2 - \rho_0 \kappa^2) \tilde{u}_1 + (\mu_1 \alpha^2 - \rho_1 \kappa^2) \tilde{u}_0, \\ \tilde{u}_1|_{x_3=0} = 0, \quad \tilde{\sigma}_1|_{x_3=1} = 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Решение задачи (3.8) в нулевом приближении аналогично решению (3.4).

Решение задачи (3.9) после применения обратного преобразования Фурье приводится к виду

$$u|_{x_3=1} = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} (-\mu_1(\xi)K_1(\xi, x_1) + -\rho_1(\xi)K_2(\xi, x_1))d\xi,$$

$$K_1(\xi, x_1) = \int_{\sigma} \tilde{p}(\alpha) \left\{ \frac{1}{\mu_0^2} \left[\frac{\Sigma_2(\alpha, \xi)}{\Sigma_2(\alpha, 1)} \right]^2 + \alpha^2 \left[\frac{U_2(\alpha, \xi)}{\Sigma_2(\alpha, 1)} \right]^2 \right\} e^{-i\alpha x_1} d\alpha, \quad (3.10)$$

$$K_2(\xi, x_1) = \int_{\sigma} \tilde{p}(\alpha) \omega^2 \left[\frac{U_2(\alpha, \xi)}{\Sigma_2(\alpha, 1)} \right]^2 e^{-i\alpha x_1} d\alpha.$$

Равенство (3.10) может быть истолковано как интегральное уравнение относительно функций-поправок ρ_1 и μ_1 , и использовано для построения итерационного процесса. Рассмотрим для примера случай, когда μ – известно, а ρ – требуется определить.

Выбирая некоторое начальное приближение ρ_0 , решая краевую задачу (3.8) и обращая преобразование Фурье, находим u_0 , σ_0 . Затем, считая u_1 равной разности между наблюдаемым полем перемещений и полем u_0 , решаем уравнение (3.10) и находим ρ_1 .

Прибавляя найденную поправку ρ_1 к функции ρ_0 , повторяем процедуру до тех пор, пока очередная поправка ρ_1 не станет пренебрежимо мала или количество итераций не превысит некоторое наперед заданное количество. Также критерием может служить малость разности между наблюдаемым полем перемещений и полем перемещений, построенным при найденной плотности. Аналогично строится итерационный процесс для отыскания μ .

На рис.3 представлены результаты решения задачи о восстановлении плотности $\rho(x_3) = 1 + \rho_1(x_3)$ при постоянном модуле сдвига, погрешность восстановления составила 1,82 %.

На рис.4 приведены результаты реконструкции функции $\mu(x_3) = 1 + \mu_1(x_3)$ при постоянной плотности, погрешность реконструкции составила 8,25 %.

Во всех рассмотренных примерах $p(x_1) = \delta(x_1)$, исходной информацией для решения задачи служит информация о вещест-

венной части поля перемещений на отрезке $[0;1]$ на фиксированной частоте при $\kappa = 3$, $x_3 \in [0, 1]$.

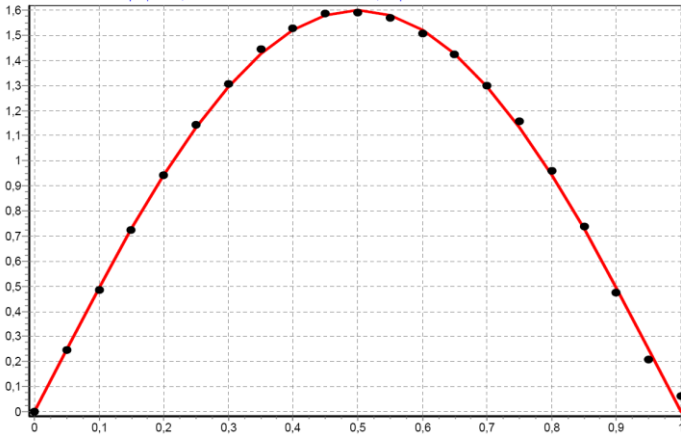


Рис. 3. Графики точной (сплошной) и восстановленной (точками) функции $p_1(x_3) = 1,6 \sin \pi x_3$

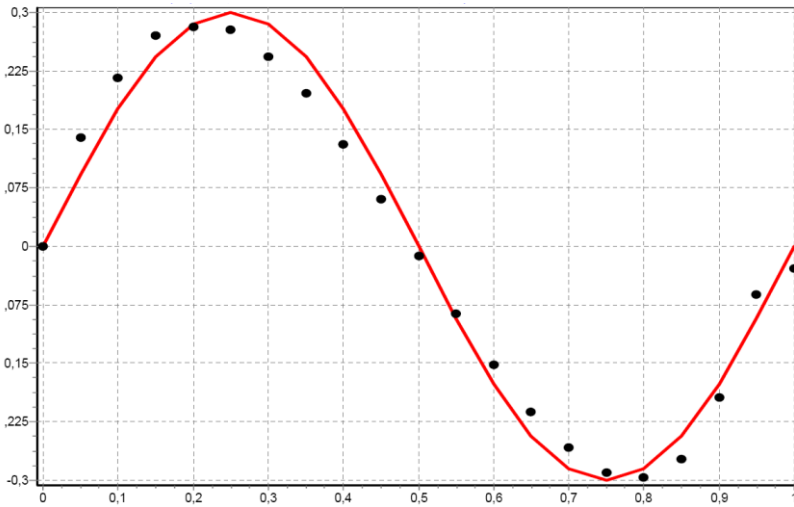


Рис. 4. Графики точной (сплошной) и восстановленной (точками) функции $\mu_1(x_3) = 0,3 \sin 2\pi x_3$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №10-01-00194-а, №12-01-31501), ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 годы (госконтракт П596).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Martin L., Elliott L., Ingham D.B., Lesnic D.* Parameter identification in isotropic linear elasticity using the boundary element method Engineering analysis with boundary elements, V. 28. 2004. P. 221–233.
2. *H. Zhang, X. Lin, Y. Wang, Q. Zhang, Y. Kang* Identification of elastic-plastic mechanical properties for bimetallic sheets by hybrid-inverse approach. Acta mechanica solida sinica. V. 23, N 1. 2010. P. 29–35.
3. *F. Yoshida, M. Urabe, R. Hino, V.V. Toropov* Inverse approach to identification of material parameters of cyclic elasto-plasticity for component layers of a bimetallic sheet. International Journal of Plasticity, V.19. 2003. P. 2149–2170.
4. *Jadamba B., Khan A. A., Raciti F.* On the inverse problem of identifying Lamé coefficients in linear elasticity // J. Computers and Mathematics with Applications. 2008. V. 56. P. 431–443.
5. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
6. *Ватульян А. О., Явруян О. В., Богачев И. В.* Идентификация свойств слоя стратифицированного слоя // Акустический журнал. 2011. Т. 57. № 6. С. 723–730.

